Primer día

8 de septiembre de 2023

Problema 1. Determinar todas las parejas de reales positivos (a, b) con $a < b$ tales que la siguiente serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b \{x\}^k \, dx = \int_a^b \{x\} \, dx + \int_a^b \{x\}^2 \, dx + \int_a^b \{x\}^3 \, dx + \cdots$$

sea convergente y hallar su valor en función de a y b.

Nota: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ denota la parte fraccionaria de x.

Solución. Se sabe que $0 \leq \{x\} < 1$. Luego la siguiente serie geométrica converge y podemos hallar su suma

$$\{x\} + \{x\}^2 + \ldots = \frac{\{x\}}{1 - \{x\}} = \frac{1}{1 - \{x\}} - 1$$

Luego se tiene que si la serie converge, se pueden intercambiar los símbolos de suma e integral y por ende

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \{x\}^n \, dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \{x\}^n \, dx = \int_a^b \left(\frac{1}{1 - \{x\}} - 1 \right) dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \{x\}^n \, dx = \int_a^b \left(\frac{1}{1 - \{x\}} \right) dx + a - b$$

Si $x \to n^-$ para n entero, entonces $\frac{1}{1-\{x\}} \to \infty$ y por ende la integral anterior es impropia si contiene a $x \to n^-$. Si existe un entero n tal que $a < n \leq b$, entonces se puede dividir la integral anterior de a hasta n y contiene la singularidad. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $n - 1 \leq a$, luego

$$\int_a^n \frac{1}{1 - \{x\}} \, dx = \int_{a-n+1}^1 \frac{1}{1 - x} \, dx = \lim_{c \to 1^-} \int_{a-n+1}^c \frac{1}{1 - x} \, dx$$

$$\int_a^n \frac{1}{1 - \{x\}} \, dx = \lim_{c \to 1^-} - \ln(1 - x)\Big|_{a-n+1}^c = \ln(n - a) - \lim_{c \to 1^-} \ln(1 - c) = \infty$$

Entonces en este caso la integral impropia diverge. Si $\lfloor x \rfloor = n$, entonces $\{x\} = x - n$. Luego debe cumplirse $n \leq a < b < n + 1$ para un entero no negativo n, en cuyo caso la integral anterior no es impropia y converge. Luego

$$\int_a^b \left(\frac{1}{1 - \{x\}} \right) dx = \int_{a-n}^{b-n} \left(\frac{1}{1 - x} \right) dx = - \ln(1 - x)\Big|_{a-n}^{b-n} = \ln\left(\frac{n + 1 - a}{n + 1 - b} \right)$$

Se concluye que la serie converge si y sólo si $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = n$ y la suma es igual a

$$\ln\left(\frac{1 - \{a\}}{1 - \{b\}} \right) + a - b$$

Problema 2. Un juguetero tiene a su disposición k dados, cada uno con 6 caras en blanco. Sobre cada cara de cada uno de estos dados el juguetero debe dibujar uno de los dígitos $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Determinar (en función de k) el mayor entero n tal que el juguetero pueda dibujar dígitos en los k dados de modo que, para cualquier entero positivo $r \leq n$, se puedan escoger algunos de los k dados y formar con ellos la representación decimal de r.

Nota: Los dígitos 6 y 9 son distinguibles: aparecen como $\underline{6}$ y $\underline{9}$.

(propuesto por *Oscar Zamora, Universidad de Costa Rica*)

Solución. Suponga primero que $6k = 10t + r$ con $0 \leq r < 10$, note que como $6k$ es par, entonces $r+1$ también es par, es decir, $r \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, en particular $r < 9$, por lo que $r+1$ será un dígito. Veamos que no es posible formar todos los números de menores o iguales a $(r+1) \cdot \underbrace{11 \cdots 11}_{t+1 \text{ dígitos}}$. Suponga por contradicción que si es posible. Como los números $\underbrace{11 \cdots 11}_{t+1 \text{ dígitos}}, \underbrace{22 \cdots 22}_{t+1 \text{ dígitos}}, \ldots, (r+1) \cdot \underbrace{11 \cdots 11}_{t+1 \text{ dígitos}}$ se pueden formar, tenemos que los dígitos $1, 2, \ldots, r+1$ se debieron haber dibujado $t+1$ veces, y como tenemos los números $(r+2) \cdot \underbrace{11 \cdots 11}_{t \text{ dígitos}}, (r+3) \cdot \underbrace{11 \cdots 11}_{t \text{ dígitos}}, \ldots, 9 \cdot \underbrace{11 \cdots 11}_{t \text{ dígitos}}$ y 10^t, tenemos que los dígitos $r+2, r+3, \ldots, 9, 0$ aparecen t veces dibujados. Concluimos que el número de dígitos dibujado sería $(r+1) \cdot (t+1) + (10 - r - 1) \cdot t = 10t + r + 1$, sin embargo esto es una contradicción ya que en k dados se pueden dibujar $6k = 10t + r$ dígitos,

Ahora veamos que que todo número menor a $(r+1) \cdot \underbrace{11 \cdots 110}_{t+1 \text{ dígitos}} + r$ se puede formar.

Para esto determinaremos una forma de pintar las caras tales que:

1. *a*) Todo dígito entre 1 y r aparecerá en $t+1$ dados distintos.
2. *b*) Todo dígito entre $r+1, r+2, \ldots, 9, 0$ aparecerá en t dados distintos
3. *c*) Si $t > 1$, hay al menos un dado que contiene al dígito 0, pero que no contiene a al dígito $r+1$.

Veamos primero que, si logramos pintar los dados de esta forma, entonces todo número menor a $m < (r+1) \cdot \underbrace{11 \cdots 11}_{t+1 \text{ dígitos}}$ puede ser representado.

Si $m = a_1 a_2 \cdots a_t$ es un número de t dígitos, entonces podemos escoger codiciosamente dados distintos que contengan a los dígitos $a_1, a_2, \ldots, a_t$, ya que, como todo dado está en al menos t dados, es claro que no agotaremos las opciones para escoger los dígitos.

Ahora si $m = a_1 a_2 \cdots a_{t+1}$ es un número de $t+1$ dígitos, con $m < (r+1) \cdot \underbrace{11 \cdots 11}_{t+1 \text{ dígitos}}$, entonces al menos uno de los dígitos es menor a $r+1$. Tenemos dos casos:

• Si para algún i, el dígito a_i es un dígito entre 1 y r. Podemos escoger primero los dados que contengan a los t dígitos restantes, lo podemos hacer sin problema pues cada dado está en t dígitos. una vez escogidos estos dados, podemos escoger aún un dado distinto a los anteriores que tenga el dígito a_i, pues este dígito aparece en $t+1$ dados.

• Si a_i es uno de los dígitos $r+1, r+2, \ldots, 9, 0$ para todo i (este caso solo es posible si $t > 1$). Tenemos que $a_1 = r+1$ y hay un índice i tal que $a_i = 0$. Escogemos primero un dado que tenga a 0, pero no a $r+1$ para escoger el dígito a_i, luego continuamos escogiendo dados para representar los dígitos $a_2, a_3, \ldots, a_{t+1}$, excluyendo el a_i que ya fue escogido, esto lo podemos hacer sin problema pues cada dígito se encuentra en t dados, por último, el dígito $r+1$ aparece en t dados, y de los t dados que escogimos, sabemos que el dado que representa a a_i no contiene a $r+1$, por lo que de momento a lo sumo usamos $t-1$ dados que tienen al dígito $r+1$, y así nos queda todavía un dado disponible para que se represente el dígito a_1.

Ahora veamos que siempre podemos dibujar en los dados de formar que que cumplan las propiedades.

Supongamos primero que $r \neq 8$. Enumere los dados y sobre el i-ésimo dado imprima los dígitos $6(i-1)+1, 6(i-1)+2, \ldots, 6(i-1)+6$, tomando la congruencia módulo 10. Por la forma de asignar los dígitos, esta forma de dibujar en los dados satisface *a*) y *b*).

Para ver la tercera condición suponemos que $t > 1$ o equivalentemente $k \geq 2$.

Vemos que los primeros cinco dados en pintarse (si existen) tendrían los dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9, 0, 1, 2\}$, $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\{9, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $\{5, 6, 7, 8, 9, 0\}$. De esta forma:

Si $r = 2$ o $r = 4$, vemos que segundo dado tiene al 0, pero no al $r+1$.

Si $r = 6$, entonces $k \geq 4$, y vemos que cuarto dado tiene al 0 pero no al $\underline{7}$.

Si $r = 0$, $k \geq 5$ y tenemos que quinto dado tiene al 0 pero no al 1.

Así que se satisface la condición *c*) en cada uno de los casos anteriores. Por último en el caso $r = 8$, lo que haremos es dibujar los primeros dos dados como $\{1, 2, \underline{9}, 4, 5, \underline{6}\}$, $\{7, 8, 3, 0, 1, 2\}$, y el resto siguiendo el patrón anterior, de esta forma el segundo dado tiene al 0 pero no al 9, por lo que se satisface *c*).

Problema 3. Dada una matriz A real simétrica de 3×3, definimos $f(A)$ como una matriz de 3×3 con los mismos vectores propios que A tal que si A tiene valores propios a, b, c, entonces $f(A)$ tiene valores propios $b+c, c+a, a+b$ (en ese orden). Definimos una secuencia de matrices reales simétricas $A_0, A_1, A_2, \ldots$ de 3×3 tales que $A_{n+1} = f(A_n)$ para $n \geq 0$. Si la matriz A_0 no tiene ninguna entrada nula, hallar el máximo número de índices $j \geq 0$ para los cuales la matriz A_j tiene alguna entrada nula.

Solución. Sea I la matriz identidad de 3×3. Como A es real simétrica, entonces tiene una base de vectores propios u, v, w. Sea u un vector propio correspondiente a a de la matriz A, luego u es un vector propio correspondiente a $b+c$ de la matriz $f(A)$. Luego

$$(A + f(A))u = Au + f(A)u = au + (b+c)u = (a+b+c)u$$

Análogamente, tenemos

$$(A + f(A))v = (a+b+c)v, \quad (A + f(A))w = (a+b+c)w$$

Luego la matriz $A + f(A)$ tiene una base de vectores propios con el mismo valor propio $a+b+c$, esto implica que

$$A + f(A) = (a+b+c)I$$

Por otro lado, es conocido que la suma de los valores propios de una matriz es igual a la traza de la matriz, por ende

$$f(A) = \operatorname{tr}(A)I - A$$

y $f(A)$ también es real simétrica. Adicionalmente, se tiene que

$$\operatorname{tr}(f(A)) = (b+c) + (c+a) + (a+b) = 2(a+b+c) = 2\operatorname{tr}(A)$$

Definimos $s_n = \operatorname{tr}(A_n)$ para $n \geq 0$. Se tiene que $A_{n+1} = f(A_n)$, por ende $s_{n+1} = 2s_n$ para $n \geq 0$. Como s_n es una progresión geométrica, se tiene que $s_n = 2^n s_0$. Por otro lado, se tiene que

$$A_{n+1} = f(A_n) = \operatorname{tr}(A_n)I - A_n = s_n I - A_n$$

Si $s_0 = 0$, entonces $s_n = 0$ y $A_{n+1} = -A_n$. Luego ninguna matriz de la sucesión tiene entradas nulas. Supongamos que $s_0 \neq 0$, vamos a demostrar por inducción que

$$A_n = (-1)^n A_0 + \frac{s_0}{3}(2^n - (-1)^n)I$$

Para $n = 1$, se tiene $A_1 = -A_0 + s_0 I$ debido a la recurrencia anterior. Supongamos que se cumple para n, luego

$$A_{n+1} = s_n I - A_n = 2^n s_0 I - \left((-1)^n A_0 + \frac{s_0}{3}(2^n - (-1)^n)I\right)$$

$$A_{n+1} = (-1)^{n+1} A_0 + \frac{s_0}{3}(3 \cdot 2^n - 2^n + (-1)^n) = (-1)^{n+1} A_0 + \frac{s_0}{3}(2^{n+1} - (-1)^{n+1})$$

Lo cual concluye la inducción. Luego A_n tiene los mismos términos fuera de la diagonal iguales a A_0 o $-A_0$. Como A_0 no tiene entradas nulas, entonces A_n no tiene entradas no nulas fuera de la diagonal. Supongamos que A_n tiene una entrada nula, luego esa entrada está en la diagonal. Definimos $a_{ij,n}$ es la entrada i, j de A_n. Supongamos $a_{ii,n}$ es una entrada nula de A_n, luego

$$0 = a_{ii,n} = (-1)^n a_{ii,0} + \frac{s_0}{3}(2^n - (-1)^n) \implies a_{ii,0} = (-1)^{n+1}\frac{s_0}{3}(2^n - (-1)^n) = \frac{s_0}{3}(1 - (-1)^n 2^n)$$

Es decir $a_{ii,0} = \frac{s_0}{3}(1-(-2)^n)$. Para cierto i, esto sólo puede ocurrir para cierto n. Luego hay a lo sumo 3 términos de la secuencia que tienen alguna entrada nula. Supongamos que eso ocurre para 3 enteros positivos distintos $m < n < l$ (sin pérdida de generalidad), entonces

$$a_{11,0} = \frac{s_0}{3}(1 \pm 2^m), \quad a_{22,0} = \frac{s_0}{3}(1 \pm 2^n), \quad a_{33,0} = \frac{s_0}{3}(1 \pm 2^l)$$

Sumando las 3 ecuaciones se tiene que

$$s_0 = \frac{s_0}{3}(3 \pm 2^m \pm 2^n \pm 2^l)$$

Como $s_0 \neq 0$, entonces

$$3 = 3 \pm 2^m \pm 2^n \pm 2^l \implies \pm 2^m \pm 2^n \pm 2^l = 0 \implies 1 = \pm 2^{n-m} \pm 2^{l-m}$$

Lo anterior sólo tiene solución $1 = -2^0 + 2^1$, que implica que $m = n$ y $l = n+1$, que contradice nuestra suposición. Luego hay a lo sumo dos matrices de la secuencia con alguna entrada nula. La siguiente matriz da un ejemplo para el máximo 2:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Concluimos que el máximo número de matrices de la secuencia con alguna entrada nula es 2.