

# Segundo dia

9 de setembro de 2023

**Problema 4.** Para um inteiro positivo  $n$ ,  $\sigma(n)$  denota a soma dos divisores positivos de  $n$ . Determine

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n^{2023})}{(\sigma(n))^{2023}}$$

**Nota:** Dada uma sequência  $(a_n)$  de números reais, dizemos que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  se  $(a_n)$  não é limitada superiormente, e, caso contrário,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  é a menor constante  $C$  tal que, para todo real  $K > C$ , existe um inteiro positivo  $N$  com  $a_n < K$  para todo  $n > N$ .

**Problema 5.** Dado um inteiro positivo  $k > 1$ , determine todos os inteiros positivos  $n$  tais que o polinômio

$$P(z) = z^n + \sum_{j=0}^{2^k-2} z^j = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{2^k-2} + z^n$$

tem uma raiz complexa  $w$  tal que  $|w| = 1$ .

**Problema 6.** Seja  $n$  um inteiro positivo. Definimos  $f(n)$  como o número de sequências finitas  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  de inteiros positivos tais que  $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k$  e

$$a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \cdots + a_k^k \leq n.$$

Determine  $\alpha$  e  $C$  constantes positivas tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n^\alpha} = C.$$

**Cada problema vale 10 pontos  
Tempo máximo: 4h 30m.**