Segundo día

9 de septiembre de 2023

Problema 4. Para un entero positivo n, $\sigma(n)$ denota la suma de los divisores positivos de n. Hallar

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n^{2023})}{(\sigma(n))^{2023}}$$

Nota: Dada una sucesión (a_n) de números reales, decimos que $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$ si (a_n) no es acotada superiormente, y, en el caso contrario, $\limsup_{n\to\infty} a_n$ es la menor constante C tal que, para todo real $K > C$, existe un entero positivo N con $a_n < K$ para todo $n > N$.

Solución. Si $n = 1$, entonces $\frac{\sigma(n^m)}{(\sigma(n))^m} = 1$. Supongamos que $n > 1$, luego $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ y por ende $n^m = \prod_{i=1}^k p_i^{m\alpha_i}$ y

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k}(1 + p_i + p_i^2 + \ldots + p_i^{\alpha_i})$$

$$\sigma(n^m) = \prod_{i=1}^{k}(1 + p_i + p_i^2 + \ldots + p_i^{m\alpha_i})$$

Por ende

$$\frac{\sigma(n^m)}{(\sigma(n))^m} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1 + p_i + p_i^2 + \ldots + p_i^{m\alpha_i}}{(1 + p_i + p_i^2 + \ldots + p_i^{\alpha_i})^m}$$

Vamos a mostrar que $\dfrac{1 + p + p^2 + \ldots + p^{m\alpha}}{(1 + p + p^2 + \ldots + p^{\alpha})^m} < 1$ para enteros $p > 1$, $m > 1$ y $\alpha > 0$. Basta ver que el coeficiente de p^j sea mayor o igual a 1 para todo $0 \leq j \leq m\alpha$ en el denominador. El teorema multinomial implica que

$$(1 + p + p^2 + \ldots + p^{\alpha})^m = \sum_{j_0 + j_1 + \ldots + j_\alpha = m} \binom{m}{j_0, j_1, \ldots, j_\alpha} p^{j_1 + 2j_2 + \ldots + \alpha j_\alpha}$$

Como el coeficiente multinomial es un entero positivo, es al menos igual a 1. Y $j_1 + 2j_2 + \ldots + \alpha j_\alpha$ toma todos los valores de $0 \leq j \leq m\alpha$. Luego lo anterior implica que la fracción es menor o igual que 1. La igualdad no se puede dar ya que el coeficiente para el exponente $j = 1$ es $m > 1$.
Luego para todo $n > 1$ se cumple que

$$\frac{\sigma(n^m)}{(\sigma(n))^m} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sup \frac{\sigma(n^m)}{(\sigma(n))^m} \leq 1$$

Si n es primo, entonces

$$\frac{\sigma(n^m)}{(\sigma(n))^m} = \frac{n^m + n^{m-1} + \ldots + n + 1}{(n+1)^m} = \frac{n^m + n^{m-1} + \ldots + n + 1}{n^m + mn^{m-1} + \ldots + mn + 1}$$

La expresión de la derecha tiende a 1 cuando n tiende a infinito. Como hay infinitos primos $\frac{\sigma(n^m)}{(\sigma(n))^m}$ tiene supremo igual a 1 para n primo. La desigualdad y el resultado anterior implican que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n^m)}{(\sigma(n))^m} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \frac{\sigma(k^m)}{(\sigma(k))^m} = 1$$

Nota: Si $m = 2$, entonces la desigualdad se puede demostrar directamente factorizando y usando la desigualdad entre MA y MG (la desigualdad es estricta ya que $p_i > 1$ y $\alpha_i > 0$):

$$p_i^{2\alpha_i+1} + p_i > 2p_i^{\alpha_i+1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p_i^{2\alpha_i+2} - p_i^{2\alpha_i+1} - p_i + 1}{p_i^{2\alpha_i+2} - 2p_i^{\alpha_i+1} + 1} < 1$$

La desigualdad mostrada se puede también demostrar por inducción en $m > 1$.

Problema 5. Dado un entero positivo $k > 1$, hallar todos los enteros positivos n tales que el polinomio

$$P(z) = z^n + \sum_{j=0}^{2^k-2} z^j = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{2^k-2} + z^n$$

tiene una raíz compleja w tal que $|w| = 1$.

Solución.

Se n é ímpar -1 é raiz de P.

Suponha agora n par.

Supondo que exista raiz $w = e^{i\theta}$ de P. Como $P(1) = 2^k \neq 0 \Rightarrow w \neq 1$.

$$0 = P(e^{i\theta}) = e^{i\theta n} + \frac{(e^{i\theta})^{(2^k-1)} - 1}{e^{i\theta} - 1} = e^{i\theta n} + \frac{e^{i\theta(2^k-1)/2} 2i \sin(\theta(2^k-1)/2)}{e^{\frac{i\theta}{2}} 2i \sin(\theta/2)}$$

$$\Rightarrow -e^{i\theta n} = e^{i\theta(2^k-1)} \frac{\sin(\theta(2^k-1)/2)}{\sin(\theta/2)}$$

$$\Rightarrow |-e^{i\theta n}| = |e^{i\theta(2^{k-1})-1}|\left|\frac{\sin(\theta(2^k-1)/2)}{\sin(\theta/2)}\right|$$

$$\Rightarrow |\sin(\theta/2)| = |\sin(\theta(2^k-1)/2|$$

$$\Rightarrow \frac{(2^k-1)\theta}{2} \mp \frac{\theta}{2} = t\pi, t \in Z$$

Caso 1

$$\frac{(2^k-1)\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = t\pi, t \in Z$$

$$\Rightarrow 2^k\theta = t\pi \Rightarrow e^{2^k\theta i} = 1$$

$$\Rightarrow (e^{\theta i})^{2^k} - 1 = 0 \; (e^{\theta i} \neq 1) \Rightarrow 1 + e^{\theta i} + e^{2\theta i} + \cdots + e^{(2^k-1)\theta i} = 0$$

Como

$$0 = P(e^{\theta i}) = 1 + e^{\theta i} + e^{2\theta i} + \cdots + e^{(2^k-2)\theta i} + e^{n\theta i}$$

$$\Rightarrow e^{(2^k-1)\theta i} = e^{n\theta i} \Rightarrow \frac{(2^k-1)\theta - n\theta}{2\pi} \in\ Z,\ (\theta = \frac{2t\pi}{2^k})$$

$$\Rightarrow \frac{(2^k-1-n)\frac{2t\pi}{2^k}}{2\pi} \in Z$$

$$\Rightarrow t = 2^k\tau \in Z \Rightarrow 2^k\theta = 2.2^k\tau\pi \Rightarrow \theta = 2\tau\pi \Rightarrow w = e^{\theta i} = 1 \text{ (Absurdo!)}$$

Caso 2

$$\frac{(2^k-1)\theta}{2} - \frac{\theta}{2} = t\pi, t \in Z$$

$$\Rightarrow (2^k-2)\theta = 2t\pi \Rightarrow e^{(2^k-2)\theta i} = 1$$

$$\Rightarrow (e^{\theta i})^{(2^k-2)} - 1 = 0\ (e^{\theta i} \neq 1) \Rightarrow 1 + e^{\theta i} + e^{2\theta i} + \cdots + e^{(2^k-3)\theta i} = 0$$

Como

$$0 = P(e^{\theta i}) = 1 + e^{\theta i} + e^{2\theta i} + \cdots + e^{(2^k-2)\theta i} + e^{n\theta i}$$

$$\Rightarrow e^{(2^k-2)\theta i} = -e^{n\theta i} = e^{(n\theta+\pi)i} \Rightarrow \frac{(2^k-2)\theta - n - \pi}{2\pi} \in\ Z,\ (\theta = \frac{t\pi}{2^{(k-1)}-1})$$

$$\Rightarrow \frac{(2^k-2-n)\frac{t\pi}{2^{(k-1)}-1} - \pi}{2\pi} \in Z$$

$$\Rightarrow \frac{(2 - \frac{n}{2^{(k-1)}-1})t - 1}{2} \in Z$$

$$\Rightarrow (2 - \frac{n}{2^{(k-1)}-1})t \text{ é inteiro ímpar. (Absurdo, pois n é par!)}$$

Problema 6. Sea n un entero positivo. Se define $f(n)$ como el número de secuencias finitas $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ de enteros positivos tales que $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k$ y

$$a_1 + a_2^2 + a_3^3 + \cdots + a_k^k \leq n.$$

Hallar α y C constantes positivas tales que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^\alpha} = C.$$

Solución. Primero veamos que como $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$, entonces $a_i \geq i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea m el menor entero positivo tal que $(m+1)^{m+1} > n$, luego $k \leq m$. Notemos que $a_k < n^{1/k}$, por ende $a_k \leq \lfloor n^{1/k} \rfloor$. Veamos que si escogemos k números menores o iguales que $\lfloor n^{1/k} \rfloor$, entonces obtenemos a lo sumo una secuencia que cumple la condición dada. Como hay $\binom{\lfloor n^{1/k} \rfloor}{k}$ formas de escoger los k números, entonces

$$f(n) \leq \sum_{k=1}^{m} \binom{\lfloor n^{1/k} \rfloor}{k}$$

Por otro lado, si escogemos k números menores o iguales que $\lfloor n^{1/k} \rfloor - 1$, entonces obtenemos una secuencia que cumple la condición dada. Luego

$$f(n) \geq \sum_{k=1}^{m} \binom{\lfloor n^{1/k} \rfloor - 1}{k}$$

Notemos que si $k > 1$, entonces

$$\frac{(n-k+1)^k}{k!} < \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} < \frac{n^k}{k!}$$

Luego

$$f(n) \leq \sum_{k=1}^{m} \binom{\lfloor n^{1/k} \rfloor}{k} \leq \sum_{k=1}^{m} \binom{n^{1/k}}{k} < \sum_{k=1}^{m} \frac{(n^{1/k})^k}{k!} = n \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} < n(e-1)$$

Por otro lado

$$f(n) \geq \sum_{k=1}^{m} \binom{\lfloor n^{1/k} \rfloor - 1}{k} \geq \sum_{k=1}^{m} \binom{n^{1/k} - 2}{k} > \sum_{k=1}^{m} \frac{(n^{1/k} - k - 1)^k}{k!} > \sum_{k=1}^{m} \frac{(n^{1/k} - m)^k}{k!}$$

$$f(n) > \sum_{k=1}^{m} \frac{(n^{1/k} - m)^k}{k!} > \sum_{k=1}^{m} \frac{n - mkn^{(k-1)/k}}{k!} = \sum_{k=1}^{m} \frac{n}{k!} - m \sum_{k=1}^{m} \frac{n^{(k-1)/k}}{(k-1)!}$$

Por ende

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} - m \sum_{k=1}^{m} \frac{n^{-1/k}}{(k-1)!} < \frac{f(n)}{n} < e - 1$$

Veamos que

$$0 < m\frac{n^{-1/k}}{(k-1)!} < \frac{m^{1-m/k}}{(k-1)!} < \frac{1}{m^2} \implies 0 < m \sum_{k=1}^{m} \frac{n^{-1/k}}{(k-1)!} < \frac{1}{m}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} - m \sum_{k=1}^{m} \frac{n^{-1/k}}{(k-1)!} \right) = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \right) - \lim_{m\to\infty} \left(m \sum_{k=1}^{m} \frac{n^{-1/k}}{(k-1)!} \right) = e - 1$$

Luego el teorema del sándwich implica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = e - 1$$

Se concluye que $f(n) \sim (e-1)n$.